11.1.17 Komplexní čísla

Předpoklady:

Př. 1: Sčítání, odčítání a násobení komplexních čísel je velmi podobné stejným operacím probíraným v prvním ročníku. S čím? Jaký je rozdíl?

Sčítání, odčítání a násobení komplexních čísel provádíme stejně jako stejné operace s dvojčleny.
Rozdíl je v tom, že vyšší než první mocniny komplexní jednotky *i* můžeme upravovat a tím zjednodušovat.

Př. 2: Jakých hodnot může nabývat přirozená mocnina komplexní jednotky i^n? Sestav přehled možných hodnot a odpovídajících mocnin.

Př. 3: Následující výrazy vyjádřete jedním komplexním číslem v alg. tvaru:

a) $\frac{1}{i}+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$ b) $\frac{\left(\sqrt{5}+2i\right)\cdot(1+i)^2}{i\sqrt{5}-2}$ c) $2i^9-i^{12}+5i^{16}-3i^{11}$

a) $1-i$ b) 2 c) $5+4i$

Př. 4: Vypočítejte: a) $\overline{(1+i)}\cdot\overline{(3+2i)}$ b) $\frac{\left|\frac{3-4i}{5i}\right|\cdot\left|\frac{1+i}{3-i}\right|}{|2i-1|+|-i|}$

a) $1-5i$ b) $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$

Př. 5: Převeďte do goniometrického tvaru a) $\frac{3-i}{1+3i}$, b) $\frac{i^{10}-1}{i^5+1}$

a) $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$ b) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Př. 6: Umocněte komplexní číslo $z=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^4$ s využitím Moivreovy věty a výsledky převeďte zpět do algebraického tvaru .

$\left[-8+i8\sqrt{3}\right]$

Př. 7: Vypočti: a) $(2+3i)m+(2-3i)(m+n)=7-8i$ b) $\frac{z}{1+i}-2z=3iz-1$

á) $\left[m=\frac{5}{12};n=\frac{8}{3}\right]$

Př. 8: Pomocí Moivreovy věty odvoďte vzorce pro $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \sin 4\alpha, \cos 4\alpha$

Př. 9: $(1-2i)\cdot z=2\overline{z}-i(2+i)$

$[z=7+4i]$

Př. 10: Vypočtěte: $\sqrt{(-3-4i)}$

$[-1+2i;1-2i]$

Př. 11: $x^5-16\sqrt{3}+16i=0$

$\left[2\left(\cos\frac{330°+k\cdot 360°}{5}+...\right)\right]$

Př. 12: Řešte početně: $x^2-6ix-8=0$

$[2i;4i]$

Př. 13: Určete kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou čísla:
$x_1=\cos 60°+i\sin 60°$
$x_2=\cos 240°+i\sin 240°$

$\left[a\left(x^2+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0\right]$

Př. 14: Graficky řešte soustavu: $|z+1-2i|\leq 3 \wedge |z+2-2i|>|z|$.

Př. 15: $x^{10}-16x^6+ix^4-16i=0$

$\left[\pm 2;\pm 2i;\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}k\pi\right)\right]$

Shrnutí: